VII. Gewöhnliche Differentialgleichungen

VII.1 Terminologie

gewöhnliche Dgl. (ODE): Gleichung für $y(x)$ ← eine Variable

allgemein: $F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$ („n-ter Ordnung")

heißt „linear", falls $y^{(r)}$ $(r = 0, \ldots, n)$ nur linear in F auftreten

allgemeine <u>lineare</u> ODE n-ter Ordnung sieht explizit so aus:

$$y^{(n)}(x) + f_{n-1}(x)\, y^{(n-1)}(x) + \ldots + f_1(x)\, y'(x) + f_0(x)\, y(x) = f(x) \qquad (7.1)$$

abgekürzt (mit $f_n \equiv 1$): $\sum_{k=0}^{n} f_k(x)\, y^{(k)}(x) = f(x)$

oder in „Operator-Form": $(L_n y)(x) = f(x)$ mit

$$L_n = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \frac{\partial^k}{\partial x^k}$$

$f(x)$ heißt „Inhomogenität" $\Rightarrow$ (7.1) ist $\begin{cases} \text{inhomogen falls } f \neq 0 \\ \text{homogen falls } f = 0 \end{cases}$

Aussagen über lineare ODE:

- allg. Lösung von (7.1) ist eine n-parametrige Schar von Funktionen

  $y_{c_1, c_2, \dots, c_n}(x)$ Parameter $c_1, c_2, \dots, c_n$

- k Lösungen $y_1(x), y_2(x), \dots, y_k(x)$ heißen linear unabhängig, wenn

  $$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_k y_k(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_j = 0 \quad \forall j$$

- homogene ODE $L_n y = 0$ hat genau n linear unabhängige Lösungen

  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ „Grundlösungen"

- Lösungen von $L_n y = 0$ bilden einen n-dimensionalen Vektorraum

  Beweis: $L_n y_j = 0$ und $L_n y_k = 0 \Rightarrow L_n(\alpha y_j + \beta y_k) = 0$

$\Rightarrow$ Basis $= \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ geeignet gewählt, linear unabhängig

- allgemeine Lösung der homogenen ODE ist

$$y_{hom}(x) = y_{c_1, c_2, \dots, c_n}(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) \qquad (7.2)$$

- allgemeine Lösung der inhomogenen ODE ist

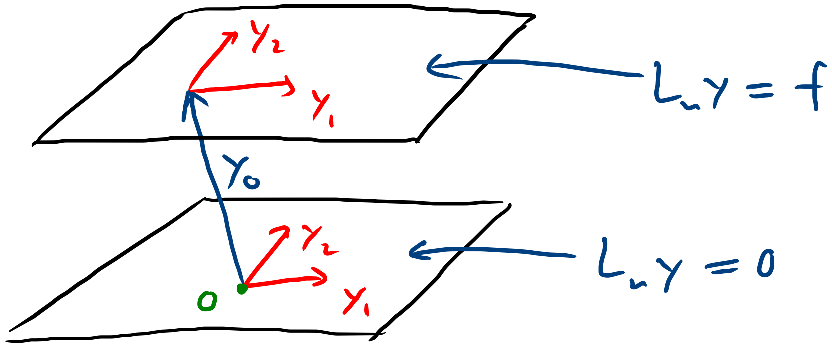
$$y_{inhom}(x) = \underline{y_{part}}(x) + y_{hom}(x) = \underline{y_0}(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) \qquad (7.3)$$

wobei $y_{part} \equiv y_0$ irgendeine spezielle Lösung ist: $L_n y_0 = f$, $L_n y_{i>0} = 0$

$\Longrightarrow$ Lösungsmenge von $L_n y = f$ ist kein Vektorraum (für $f \neq 0$)

$\Longrightarrow$ zu y_0 kann man beliebige homog. Lösungen addieren

$\Longrightarrow$ Differenz zweier inhomogener Lösungen ist eine homogene Lösung



VII.2 Zehn Fallbeispiele (5 linear, 5 nichtlinear)

① Potenz-Ansatz

$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$ ← homogen! $\Rightarrow \quad L_2 = x^2 \partial_x^2 - 2x\partial_x + 2$

Ableitungen = # x-Potenzen $\Rightarrow$ $\dim L_2 = 0$

Ansatz: $y = x^\lambda$ [allgemeiner: Potenz<u>reihen</u>-Ansatz]

eingesetzt: $x^\lambda [\lambda(\lambda-1) - 2\lambda + 2] \stackrel{!}{=} 0$

$\Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$ 2 Basislösungen $\left\{ \begin{matrix} y_1 = x \\ y_2 = x^2 \end{matrix} \right.$

allgemeine Lösung: $y(x) = c_1 x + c_2 x^2$

Test: Einsetzen!

(2) Variablen-Wechsel

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0 \qquad \text{aber zusätzlich} \qquad x > 0$$

inspiriert Wechsel $x = e^t$ weil $x \in (0,\infty) \Leftrightarrow t \in \mathbb{R}$

$$y(x) = y(e^t) =: u(t) = u(\ln x)$$

$$\frac{dx}{dt} = e^t \quad \rightsquigarrow \quad \frac{dt}{dx} = e^{-t}$$

$$\partial_x \equiv \frac{d}{dx} = \frac{dt}{dx}\,\frac{d}{dt} = e^{-t}\partial_t$$

$$\partial_x^2 = e^{-t}\partial_t\left(e^{-t}\partial_t\right) = e^{-2t}\partial_t^2 - e^{-2t}\partial_t$$

$$\Rightarrow \quad L_2 = e^{2t}\cdot e^{-2t}\left(\partial_t^2 - \partial_t\right) - 2e^t\cdot e^{-t}\partial_t + 2$$

$$= \partial_t^2 - 3\partial_t + 2 \qquad \text{konstante Koeffizienten!}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{u} - 3\dot{u} + 2u = 0 \qquad \text{Lösung} \rightsquigarrow (3)$$

3 Exponential-Ansatz

$m\ddot{x} = -kx - R\dot{x}$ $\qquad k, R > 0, \quad x \in \mathbb{R}$

ohne Reibung $(R=0)$: Schwingung mit $\omega_0^2 = k/m$

setze $k = m\omega_0^2$ und $R =: 2m\gamma$ $\rightsquigarrow$

$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2\gamma\dot{x} \iff L_2 x = 0$ mit $L_2 = \partial_t^2 + 2\gamma\partial_t + \omega_0^2$

Exponential-Ansatz: $x(t) = e^{\lambda t}$

einsetzen gilt $\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \qquad (*)$

Lösungen: $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sigma$ mit $\sigma = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

2 Grundlösungen: $x_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad x_2(t) = e^{\lambda_2 t}$

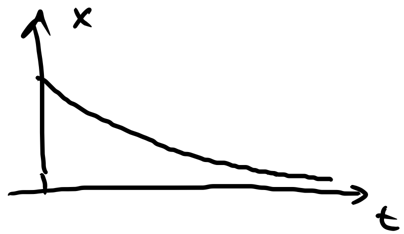
allg. homogene Lösung: $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-\gamma t}\left(c_1 e^{\sigma t} + c_2 e^{-\sigma t}\right)$

$c_1, c_2 \iff$ Anfangsbedingungen

$\rightsquigarrow$ Exponential-Ansatz löst allg. lineare ODE mit konstanten Koeffizienten

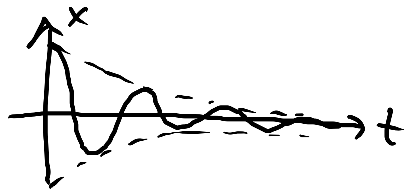
hier: unterscheide 3 Fälle (je nach Lösung von (*))

(a) $\gamma > \omega_0 \Rightarrow \sigma$ reell & $< \gamma \Rightarrow \lambda_{1,2}$ reell & < 0



$\rightsquigarrow$ abklingende exp. Funktion

(b) $\gamma < \omega_0 \Rightarrow \sigma = i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} =: i\omega \Rightarrow \lambda_1^* = \lambda_2$



$\rightsquigarrow$ x komplex ?!

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}\right) \overset{\text{Euler}}{=} e^{-\gamma t}\left([c_1+c_2]\cos\omega t + i[c_1-c_2]\sin\omega t\right)$$

Realität von x $\Leftrightarrow x^* \overset{!}{=} x \Rightarrow c_1 + c_2$ und $i(c_1 - c_2)$ sind reell

(c) $\gamma = \omega_0 \Rightarrow \sigma = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -\gamma \rightsquigarrow$ nur eine Grundlösung? Nein!

$x(t) = e^{-\gamma t}(c_1 + c_2 t)$ „aperiodischer Grenzfall"

woher die zweite Lösung $t e^{-\gamma t}$?

etwas cleverer: $L_2 = (\partial_t + \gamma)^2 + (\omega_0^2 - \gamma^2)$

suggeriert Ansatz: $x(t) = e^{-\gamma t} u(t)$

einsetzen: $(\partial_t + \gamma)\, e^{-\gamma t} \ldots = \left(e^{-\gamma t}(\partial_t + \gamma) - \gamma e^{-\gamma t}\right) \ldots = e^{-\gamma t}\partial_t \ldots$

$$\Rightarrow \quad (\partial_t + \gamma) x = (\partial_t + \gamma)\, e^{-\gamma t} u = e^{-\gamma t}\partial_t u$$

$$\Rightarrow \quad L_2 x = e^{-\gamma t}\left(\ddot{u} + (\omega_0^2 - \gamma^2) u\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{u} + (\omega_0^2 - \gamma^2) u = 0 \qquad (\text{kein } \dot{u}\,!)$$

3 Fälle: (a) $\gamma > \omega_0 \Rightarrow u \sim e^{\pm \sigma t}$

(b) $\gamma < \omega_0 \Rightarrow u \sim e^{\pm i \omega t}$

(c) $\gamma = \omega_0 \Rightarrow u \sim c_1 + c_2 t$

vorgezogen für PÜ (nichtlinear):

⑥ Trennung der Variablen (TdV)

$$y'(x) = f(x)\, g(y)$$

wir lesen ab: $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \quad | \cdot dx \quad | \div g(y)$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{dy}{g(y)}}_{\text{nur } y} = \underbrace{f(x)\, dx}_{\text{nur } x} \quad | \int$$

$$\Rightarrow \int_{y(x_0)}^{y} \frac{dy'}{g(y')} = \int_{x_0}^{x} dx'\, f(x') \qquad (7.4)$$

$$\overset{!!}{H(y)} = \overset{!!}{F(x) + C}$$

mit $F'(x) = f(x)$

$H'(y) = 1/g(y)$

Stammfunktionen

Lösungsformel: $y(x) = H^{-1}\big(F(x) + C\big) \qquad (7.4')$

④ Funktionswechsel

$$y'(x) + P(x)\, y(x) = Q(x)$$

allg. lineare ODE 1. Ordnung: $L_1 y = f$ mit $L_1 = \partial_x + P(x)$ und $f = Q(x)$

- suche die eine Grundlösung $y_1 = y_{hom}$ der homogenen Gleichung $(Q \equiv 0)$

$$(*) \quad y_1' + P y_1 = 0 \xrightarrow[\div y_1]{\text{TdV}} \frac{y_1'}{y_1} \equiv \partial_x \ln y_1 = -P \rightsquigarrow \ln y_1 = -\int_{x_0}^{x} dx'\, P(x') \; (+C)$$

$$\rightsquigarrow \quad y_1(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} dx'\, P(x')} \qquad (7.5)$$

- fehlt: eine spezielle Lsg. der inhomog. Gleichung: $y_{part} \equiv y_0$

Trick: Funktionswechsel von y_0 zu u: $\quad y_0(x) = u(x) \cdot y_1(x) \rightsquigarrow$ siehe ⑤

einsetzen: $\quad u' y_1 + \underline{u y_1'} + \underline{P u y_1} = Q \xrightarrow{(*)} u' y_1 = Q \rightsquigarrow$

$$u' = Q/y_1 \rightsquigarrow u(x) = \int_{x_1}^{x} dx' \frac{Q(x')}{y_1(x')} \rightsquigarrow y_0(x) = y_1(x) \cdot \int_{x_1}^{x} dx' \frac{Q(x')}{y_1(x')}$$

Lösungsformel:

$$y(x) = y_0 + c_1 y_1 = y_1 (c_1 + u) = e^{-\int_{x_0}^{x} dx'\, P(x')} \left(c_1 + \int_{x_1}^{x} dx'\, Q(x')\, e^{+\int_{x_0}^{x'} dx''\, P(x'')} \right) \qquad (7.6)$$

Konstanten (x_0, x_1, c), nur eine Kombi unabhängig

⑤ Variation der Konstanten (VdK)

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = f(x)$$

allg. lineare ODE 2. Ordnung: $L_2 = \partial_x^2 + a\,\partial_x + b$

homog. Gleichung hat 2 Grundlösungen y_1 & y_2, $\nexists$ allg. Methode

falls (!) eine Grundlösung y_1 bekannt, dann $\exists$ Strategie:

neue Funktion u über: $y(x) =: u(x)\,y_1(x)$ „VdK"

also: $y' = u'y_1 + uy_1'$ & $y'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$

einsetzen: $y_1u'' + 2y_1'u' + \underline{y_1''u} + ay_1u' + \underline{ay_1'u} + \underline{by_1u} = f$

wegen $y_1'' + ay_1' + by_1 = 0$ gilt dann $y_1u'' + (2y_1' + ay_1)u' = f$ keine u-Terme mehr

definiere $v := u'$ $\xrightarrow{\div y_1}$ $v' + \left(a + 2\frac{y_1'}{y_1}\right)v = \frac{f}{y_1}$ $\longrightarrow$ zurück zu ④

↳ ⑦

$\downarrow$

$v(x)$

$\downarrow$

$u(x)$

$\downarrow$

$y(x)$

Bsp.: $\ddot{x} + \omega^2 x = f(t)$ erlaubt $x_1(t) = e^{i\omega t}$ (ignoriere $x_2 = e^{-i\omega t}$)

$(a=0,\ b=\omega^2)$

Ansatz: $x(t) = e^{i\omega t} \cdot u(t)$

einsetzen: $e^{i\omega t}\left(\ddot{u} + 2i\omega\dot{u} - \cancel{\omega^2 u} + \cancel{\omega^2 u}\right) = f \quad \Big| \cdot e^{-i\omega t}$

$\dot{u} = v \rightsquigarrow \dot{v} + \underbrace{2i\omega}_{P} v = \underbrace{f e^{-i\omega t}}_{Q}$

$\overset{(7.7)}{\rightsquigarrow} v(t) = \ldots \rightsquigarrow u(t) = \ldots$

vollst. Lösung:

$$x(t) = e^{i\omega t}\Big[\underbrace{c_2}_{x_1 \sim e^{i\omega t}} + \int_0^t dt'\, e^{-2i\omega t'}\Big(\underbrace{c_1}_{x_2 \sim e^{-i\omega t}} + \underbrace{\int_0^{t'} dt''\, f(t'')\, e^{+i\omega t''}}_{x_{part}}\Big)\Big] \qquad (7.8)$$

7 Reduktion der Ordnung

a) $y'' = f(y, y')$ x kommt nicht in f vor!

Trick: betrachte y' als Funktion von y: $y' =: p(y)$

$\rightsquigarrow \quad y'' = \frac{d}{dx} p(y) = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p' \cdot y' = p' \cdot p$

einsetzen: $p' \cdot p = f(y, p)$ ODE 1. Ordnung für $p(y)$ ✓

b) $y'' = f(x, y')$ y kommt nicht in f vor!

Trick: nehme $y' =: u$ als neue Funktion

$\rightsquigarrow \quad u' = f(x, u)$ ODE 1. Ordnung für $u(x)$ ✓

c) $Ly = f$ mit $L = L_1 \cdot L_2$ Produktstruktur, L ist 2. Ordnung

Trick: $L_1 L_2 y = L_1 u = f$ mit $L_2 y = u$

$\rightsquigarrow$ 2 ODEs 1. Ordnung: löse erst für u, dann für y

8. Umwandlung in ODE-System

ODE n-ter Ordnung $\longrightarrow$ System von n ODEs 1. Ordnung

$$y^{(n)} = f\left(y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, y', y, x\right)$$

definiere

$$\left.\begin{array}{l} y =: u_0 \\ y' =: u_1 \\ y'' =: u_2 \\ \vdots \\ y^{(n-1)} =: u_{n-1} \\ y^{(n)} = f(\dots) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u_0' = u_1 \\ u_1' = u_2 \\ u_2' = u_3 \\ \vdots \\ u_{n-2}' = u_{n-1} \\ u_{n-1}' = f(u_{n-1}, u_{n-2}, \dots, u_0, x) \end{array}\right\}$$

falls <u>linear</u>, d.h. $f = a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)\, y' + a_0(x) y + a(x)$

dann von Matrix-Form: $\underline{Y}' = A \cdot \underline{Y} + \underline{F}$ mit

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \underline{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a \end{bmatrix}$$

matrixwertige Verallgem. von 4 (7.9)

Def.: Zeitentwicklungsmatrix $U(t,t_0)$

$$Y_{hom}(t) = U(t,t_0)\, Y_{hom}(t_0)$$ für AW $Y_{hom}(t_0) = Y_0$ gewählt

ODE: $\dot{Y}_{hom} = \underline{\dot{U}} Y_0 = \underline{AU} Y_0 = A Y_{hom} \rightsquigarrow \dot{U} = AU$ (7.10)

mit AW $U(t_0,t_0) = \mathbb{1}$

dann inhom. Gl., also $F \neq 0$

Ansatz $Y = U \cdot Z$ „VdK"

ODE $\rightsquigarrow$ $\dot{Y} = \dot{U} Z + U \dot{Z} \overset{(7.10)}{=} A \underbrace{UZ} + \underline{U\dot{Z}} = A \underbrace{Y} + \underline{F}$

$\rightsquigarrow U\dot{Z} = F \rightsquigarrow \dot{Z} = U^{-1} \cdot F \rightsquigarrow$

$$Z(t) = Y_0 + \int_{t_0}^{t} dt'\, U(t,t_0)^{-1} F(t')$$ (7.11)

9 & 10 weggelassen ...

FINIS